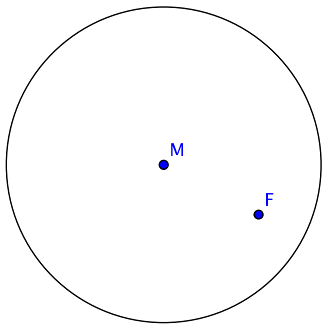
Toets behorende bij Lesson Study 4

De in het Lesson Study team gevolgde aanpak gaat uit van bestaande kennis (conflictlijnen) en laat leerlingen ervaren dat de keuze van een assenstelsel en willekeurige punten hulpmiddelen kunnen zijn om grip te krijgen op (meetkundige) probleemsituaties. In deze visie is het leren gericht op blikwisseling en de kracht van het combineren van meetkundige en analytische kennis. Daarnaast wordt ook de vaardigheid probleemoplossen belangrijk gevonden, meer dan het (alleen maar) procedureel kunnen aanpakken van problemen.
Een van de deelnemende docenten heeft enkele opgedane inzichten vertaald in een aantal toetsvragen voor een groep wiskunde D in vwo 5 (acht leerlingen) die les gehad had uit Getal en Ruimte editie 2007 (G&R), vwo wiskunde D, deel III, hoofdstuk 11. De docent heeft daarnaast de (meetkundige) constructie van de conflictlijnen leidend tot parabool, ellips en hyperbool onderwezen - deze zijn immers verdwenen uit het wiskunde B-programma. Ook onderdelen van les 1 en les 2 zoals hierboven beschreven, zijn gebruikt.
De toets is uitgevoerd op vrijdag 5 juli 2013. De eerste twee toetsvragen zagen eruit zoals hieronder weergegeven (inschatting: een klein uur werk).



Opgave 1 (16 punten)
Construeer de kegelsnede die hoort bij de figuur hiernaast.
Gebruik de volgende stappen en vertel wat je gedaan hebt!

2pt a) Construeer de symmetrie-assen h en v.
2pt b) Construeer de toppen T_1 en T_2 op de lange as (op lijn h).
3pt c) Construeer voor drie voetpunten V_i in het eerste kwadrant de punten P_i van de kegelsnede.
3pt d) Bepaal door spiegelen in de assen h en v nog negen punten van de kegelsnede.
1pt e) De figuur die je nu geconstrueerd hebt is een ….

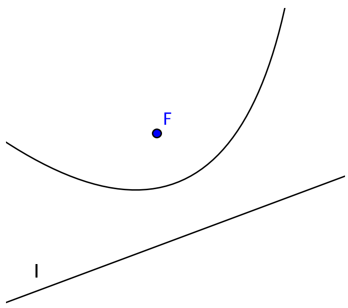
Je hebt bij b) wel de toppen T_1 en T_2 op de lange as h geconstrueerd. Maar bij de keuze van de voetpunten V_i ben je er niet zeker van dat je de toppen T_3 en T_4 op de korte as v geconstrueerd hebt.

5pt f) Verzin een constructie voor de toppen T_3 en T_4 op de korte as v van de kegelsnede.

Opgave 2 (9 punten)

Gegeven is de parabool op het werkblad.

2pt a) Kies een coördinaatsysteem handig en teken het in de figuur hiernaast.



Neem de afstand tussen de top T van de parabool en de richtlijn r gelijk aan $d(T,r)=2$.

7pt b) Geef de formule van de parabool in de standaardvorm.

De vragen 1a t/m 1e toetsen een in de les voorgedane en geoefende procedure, maar vraag 1f was nieuw: een test op probleemoplossend vermogen. Kan de leerling dit probleem oplossen? Vraag 2 is volledig geïnspireerd door de lessen uit de Lesson Study hierboven (waarvan onderdelen ook gedoceerd zijn). Hoe gaan leerlingen om met het zelf kiezen van een assenstelsel en het maken van een formule voor een conflictlijn? In G&R wordt een aanpak gegeven waarbij het lijkt alsof leerlingen een paar formules (y^2=2px met d(T,r)=1/2p) moeten onthouden en een concrete situatie moeten kunnen terugvertalen naar de standaardsituatie. Lukt dat en doen ze dat (nog steeds, na onderdelen van les 1 en les 2) zo?

In de hieronder bijgevoegde tabellen (Tabel 1 en 2) staan de resultaten van opgaven 1f en 2b. De meeste leerlingen lukt het niet om antwoord te geven op vraag 1f – nieuwe problemen oplossen blijkt niet mee te vallen. Bij vraag 2b zien we iets interessants: leerling A, F en G lijken de aanpak van G&R te willen volgen, maar zouden in de war geraakt kunnen zijn omdat de standaardsituatie van G&R pas toegepast kan worden als het assenstelsel goed (corresponderend met de aanpak) gekozen is. Dat lukt alleen leerling G, maar die heeft blijkbaar ook de vrijheid gevoeld om het assenstelsel zo te kiezen dat een en ander “past”. Vier andere leerlingen (B, D, E en H) hebben zelf de oorsprong en het assenstelsel gekozen en via het afstandsbegrip een passende formule gevonden (leerling H maakte een algebrafout – met de finish in zicht).

Een voorzichtige conclusie is dat het aanleren van het zelf kiezen van de oorsprong, een assenstelsel en eventueel een eenheidsafstand bij deze leerlingen is gelukt (het doel lijkt bereikt). De leerlingen kunnen dit type problemen aan – mits ze niet een al te procedureel algoritme aangeleerd hebben gekregen dat terugslaat als gemene niet-toepasbare voorkennis (de twijfel die er al was).

Tabel 1: toetsresultaten vraag 1f

Leerling	Uitwerking	Goed?
A	Niets ingevuld.	-
B	Je tekent een loodlijn op h vanuit F_2. Dit geeft V_{t1} en V_{t2}. Hier hetzelfde toepassen als bij c. Dit klopt, omdat dan de punten T_1 en T_2 precies tussen M_2 en F_2 in liggen.	+
C	Trek v-as door tot die cirkel raakt. Dit is je voetpunt (V_1). Trek lijn vanuit F_2 naar V_1 en vanuit M_2 naar V_1. Construeer dan de middelloodlijn van F_2V_1 op M_2V_1. Het snijpunt van de middelloodlijn met v(as) is T_3. Nu spiegel je T_3 om T_4 te krijgen.	+
D	Standaardconstructie voor punten van een ellips. Geen uitleg waarom er een top ontstaat.	-
E	Lijn z is het midden van M_2 en F_2. Hier zal de top zich bevinden dus M_2 en F_2 naar snijpunt van z met cirkel. Dus het punt van de ellips dat op lijn z ligt zal de top zijn. Weer op dezelfde manier ompasseren geeft de top aan de andere kant.	-
F	Standaardconstructie voor punten van een ellips. Geen uitleg waarom er een top ontstaat.	-
G	Geen toelichting.	-
H	Geen toelichting.	-

Tabel 2: toetsresultaten vraag 2b

Leerling	y-as	x-as	procedure als in boek	d(F_1,P)=d(r,P) formalisme	Goed?
A	Door F_1 loodrecht op r	Door top // r	x en y omgedraaid	-	-
B	Door F_1 loodrecht op r	Door top // r	-	x^2=8y	+
C	Door F_1 loodrecht op r	Door top // r	-	Positieve richting x- en y-as onduidelijk. Formules kloppen niet met assenstelsel.	-
D	Door F_1 loodrecht op r	Door top // r	-	y=1/8 x^2	+
E	Door F_1 loodrecht op r	Gelijk aan r	-	y=1/8 x^2+2	+
F	Door F_1 loodrecht op r	Door top // r	Ik weet 2py=x^2 […] -8y=x^2	-	-
G	Door top // r	Door F_1 loodrecht op r	y^2=2px, d(T,r)=1/2p : y^2=8x	-	+
H	Door F_1 loodrecht op r	Gelijk aan r	-	-8y=-x^2-16 en dus y=1/8 x^2-2 [fout]	-